9/5/2016 (ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΙΙ)

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ορθογώνιος αν $A^t A = I_n \iff$

A αντιστρ. και $A^{-1} = A^t \iff$

οι γραμμές του A ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^{1 \times n}$ με κανονικό εσωτερικό γινόμενο $\iff$

οι στήλες του A ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^{n \times 1}$ με κανονικό εσωτερικό γινόμενο

Σημασία Ορθογώνιων Πινάκων

Αν $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, τότε A ορθογώνιος $\iff$ η γραμμική απεικόνιση $f: \mathbb{R}^{n \times 1} \to \mathbb{R}^{n \times 1}$,

$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ισομετρία

Ουσιαστικά: Ορθογώνιοι πίνακες = γραμμικές ισομετρίες του $\mathbb{R}^n$

Παράδειγμα

Αν $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^{n \times 1}$, τότε $[e_1 | e_2 | \ldots | e_n]$ ορθογώνιος (και αντίστροφα) π.χ. $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

ορθογώνιος

$e_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

ορθογώνιος

$e_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$

ορθογώνιος

$e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

ορθογώνιος

Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ <u>συμμετρικός</u> (δηλ. $A^t = A$). Τότε:

i) Ο A είναι διαγωνίσιμος επί του $\mathbb{R}$.

Επομένως, $\chi_A(x) = (-1)^n (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\cdots(x-\lambda_n)$ για κάποια $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n \in \mathbb{R}$.

A διαγωνίσιμος, άρα υπάρχει $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ αντιστρέψιμος με

$$B^{-1}AB = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \ \lambda_n \end{bmatrix}$$

Ισχύει, όμως, για $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ συμμετρικός το εξής πιο ισχυρό. Υπάρχει $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ορθογώνιος με $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$.

ΕΡΩΤΗΜΑ: Ξέρουμε πως βρίσκουμε τον Β. Πώς βρίσκουμε τον P ;???

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

Προφανώς, A συμμετρικός.

Βρείτε $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ορθογώνιο ώστε $P^{-1}AP$ = διαγώνιος

ΛΥΣΗ

Βήμα 1ο: $\chi_A(x) = \begin{vmatrix} 1-x & -1 & 0 \\ -1 & 2-x & -1 \\ 0 & -1 & 1-x \end{vmatrix} =$

$= \ldots = -(x-1)\cdot x\,(x-3)$. Επομένως,

* ιδιοτιμές: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 3$ όλες
* με πολλαπλότητα 1. * του A

ΒΗΜΑ 2ο: $V_A(\lambda_1)$ Υπολογισμός Ιδιοχώρων

$V_A(\lambda_1) = V_A(0)$ μετά τις πράξεις έχει βάση $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Την ορθοκανονικοποιούμε

$g_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $e_1 = \dfrac{g_1}{\|g_1\|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ ορθοκανονική βάση του $V_A(\lambda_1)$

Ομοίως τον $V_A(\lambda_2) = V_A(1)$ έχει βάση $g_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Θέτουμε $e_2 = \dfrac{g_2}{\|g_2\|} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

Ομοίως, το $V_A(\lambda_3)=V_A(3)$ έχει βάση $g_3=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$, θέτουμε $e_3=\frac{g_3}{\|g_3\|}=\begin{pmatrix}1/\sqrt{6}\\-2/\sqrt{6}\\1/\sqrt{6}\end{pmatrix}$

Τέλος, θέτουμε $P=(e_1|e_2|e_3)=$

$$=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}$$

. Τότε, $P\in\mathbb{R}^{3\times3}$ ορθογώνιος και

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Έστω $A\in\mathbb{R}^{4\times4}$ συμμετρικός με $X_A(x)=(x-1)(x-2$

Πώς βρίσκουμε P ορθογώνιο με $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1 & & & 0\\ & 2 & & \\ & & 2 & \\ 0 & & & 2\end{bmatrix}$

Υπολογίζουμε βάση του $V_A(1)$. Ξέρουμε ότι αφού A διαγωνίσιμος $\Rightarrow$ (σαν πραγματικός) συμμετρικός γεωμ. πολ. της ιδιοτ. (1) = αλγ. πολ. της (1). Άρα $\dim V_A(1)=1$. Υπολογίζουμε βάση του g_1 του $V_A(1)$ και θέτουμε $e_1=\frac{g_1}{\|g_1\|}$

Για τους ίδιους λόγους, $\dim_{\mathbb{R}} V_A(2) = 3$.
Υπολογίζουμε βάση g_2, g_3, g_4 του $V_A(2)$
Εφαρμόζουμε Gram-Schmidt στη
βάση g_2, g_3, g_4 και ο αλγόριθμος
Gram-Schmidt μους επιστρέφει ορθο-
κανονική βάση e_2, e_3, e_4 του $V_A(2)$
Θέτουμε $P = (e_1 | e_2 | e_3, e_4)$.

Για $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ συμμετρικό:

Βήματα για εύρεση ορθογωνίου
$P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ με $P^{-1}AP$ διαγώνιος.

BHMA 1º: Υπολογισμός $\chi_A(x)$ και
των ιδιοτιμών του A.

BHMA 2º: Για κάθε ιδιοτιμή λ του A
εύρεση βάσης του ιδιόχωρου
$V_A(\lambda)$ και μετά με αλγόριθμο
Gram-Schmidt εύρεση της
ορθοκανονικής βάσης του $V_A(\lambda)$.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια απεικόνιση $q: \mathbb{R}^{n\times 1} \to \mathbb{R}$ λέγεται "τετραγωνική" μορφή στο $\mathbb{R}^n$", αν υπάρχουν $a_{ij} \in \mathbb{R}$ με $1 \leq i \leq j \leq n$ ώστε

$$q\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) = \sum a$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1) Η $q: \mathbb{R}^{2\times 1} \to \mathbb{R}$ με $q\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = x_1^2 - 5x_1x_2 + 7x_2^2$

με πίνακα $\text{πίνακας}(q) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} & 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

2) Η $q: \mathbb{R}^{4\times 1} \to \mathbb{R}$ με

$$q\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_4 \end{pmatrix}\right) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$$

είναι τετραγ. μορφή (με ιδιαίτερη σημασία στη Θεωρία της Σχετικότητας του Einstein)

είναι τετρ. μορφή, με πίνακα $\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Τα $a_{ij} \in \mathbb{R}$ στην (1) είναι μονοσήμαντα ορισμένα από την q.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Ο συμμετρικός πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ με

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \frac{a_{12}}{2} & \frac{a_{13}}{2} & \cdots & \frac{a_{1\nu}}{2} \\ \frac{a_{12}}{2} & a_{22} & \frac{a_{23}}{2} & & \frac{a_{2\nu}}{2} \\ \frac{a_{13}}{2} & \frac{a_{33}}{2} & a_{33} & & \frac{a_{3\nu}}{2} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \frac{a_{1\nu}}{2} & \frac{a_{2\nu}}{2} & \frac{a_{3\nu}}{2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

λέγεται πίνακας της τετραγωνικής μορφής q και συμβολίζεται πίνακας(q)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Έστω $q : \mathbb{R}^{3\times1} \to \mathbb{R}$ η τετρ. μορφή με

$q\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = x_1 x_3$. Βρείτε τον πίνακα(q)

$$\text{πίνακας}(q) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

αν $q\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = x_1 x_3 + x_2^2$, τότε

$$\text{πίνακας}(q) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Έστω $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Αφού $q(X_1) = q\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) =$

$= \sum a_{ij} x_i x_j = Tr(X^t A X) \quad 1 \leq i < j \leq n$

Έχουμε $q(X)=Tr(X^tAX)$ (2)
για καθε $X\in\mathbb{R}^{n\times 1}$
(όπου σημαίνει το μοναδικό στοιχείο του 1×1 πίνακα X^tAX όπου
A=πίνακας(q). Δηλαδή q καθορίζει τον πίνακα (q) και πίνακας (q) καθορίζει την q από την (2)

Παράδειγμα

$q\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\right)=x_1x_2$. Τότε, πίνακας

$(q)=\begin{bmatrix}0&\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}&0\end{bmatrix}$ και

$Tr\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}^t\cdot(\text{πίνακας}(q))\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\right)=$

$=Tr\left(\begin{bmatrix}x_1 & x_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\right)=$

$=Tr\left(\begin{bmatrix}\frac{x_2}{2}&\frac{x_1}{2}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\right)=Tr([x_1 x_2]$

$=x_1x_2=q\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\right)$

Ορισμός/Πρόταση

Έστω $q: \mathbb{R}^{n\times 1} \to \mathbb{R}$ τετραγ. μορφή στο $\mathbb{R}^n$ και $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ αντιστρέψιμος. Ορίζουμε $q': \mathbb{R}^{n\times 1} \to \mathbb{R}$ με

$$q'\left(\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}\right) = q\left(P\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_1 \end{pmatrix}\right) \text{ για } \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$$

Τότε q' είναι επίσης τετραγωνική μορφή στο $\mathbb{R}^n$

__Απόδ.__ για $n=2$. Έστω $q\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_2 \end{pmatrix}\right) =$

$= a_{11} x_1^2 + a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2$ και $P = \begin{bmatrix} c & d \\ e & f \end{bmatrix}$

Τότε $q'\left(\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}\right) = q\left(P\begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_2 \end{bmatrix}\right) =$

$= q\left(\begin{bmatrix} c & d \\ e & f \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_2 \end{bmatrix}\right) = q\left(\begin{bmatrix} cz_1 + dz_2 \\ ez_1 + fz_2 \end{bmatrix}\right) =$

$= a_{11}(cz_1 + dz_2)^2 + a_{12}((cz_1 + dz_2) \cdot$
$\cdot (ez_1 + fz_2) + a_{22}(ez_1 + fz_2)^2 =$

$= h_{11} z_1^2 + h_{12} z_1 z_2 + h_{22} z_2^2$ για κατάλληλα $h_{11}, h_{12}, h_{22} \in \mathbb{R})$

άρα q' τετραγωνική μορφή

Η q' λέγεται η τετραγωνική μορφή που προτύπο από τη q με αντικατάσταση των μεταβλητών $x = P \cdot z$".

Εύκολα βλέπουμε ότι ο πίνακας της (q')

$= P^t$ πίνακας $(q) \cdot P$

↓
ανάστροφος

Παρ. Έστω $q\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = x_1 x_2$ και $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

αντιστρέψιμος (γιατί $\det P = -2$).

Ορίζουμε $q'\left(\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}\right) = q\left(P \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}\right)$.

Έχουμε $q'\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = q\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}\right) =$

$= q\left(\begin{pmatrix} z_1 + z_2 \\ z_1 - z_2 \end{pmatrix}\right) = (z_1 + z_2)(z_1 - z_2) = z_1^2 - z_2^2$

Παρατηρούμε πίνακας $(q) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$ όχι διαγώνιος, ενώ πίνακας $(q') = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ διαγώνιος.

Ερώτημα: Αν δοθεί $q : \mathbb{R}^{n\times 1} \to \mathbb{R}$ τετραγωνική μορφή, υπάρχει $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ αντιστρέψιμος ώστε η $q' : \mathbb{R}^{n\times 1} \to \mathbb{R}$ με $q'(z) = q(P \cdot z)$ $\forall\, z \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ να έχει διαγώνιο πίνακα;

Αν $A^{n\times n}$ συμμετρικός, η εύρεση ορθογώνιου $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ώστε $P^{-1}AP =$ διαγώνιος ονομάζεται ορθογώνια διαγωνιοποίηση του A